## Komplekse tal

Hvis $z = a + ib$ og $w = c + id$ gælder

$$\begin{aligned} z + w &= (a+c) + i(b+d) \\ z - w &= (a-c) + i(b-d) \\ z \cdot w &= (ac - bd) + i(ad - bc) \\ \tfrac{z}{w} &= \tfrac{a+ib}{c+id} = \tfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\tfrac{bc-ad}{c^2+d^2}, \quad w \neq 0 \\ z^{-1} &= \tfrac{a}{a^2+b^2} - i\tfrac{b}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

### Konjugation

$$\begin{aligned} \overline{z} + \overline{w} &= \overline{z + w} \\ \overline{z} - \overline{w} &= \overline{z - w} \\ \overline{z} \cdot \overline{w} &= \overline{z \cdot w} \\ |z|^2 = z \cdot \overline{z} &= a^2 + b^2 \\ \tfrac{\overline{z}}{\overline{w}} &= \overline{\left(\tfrac{z}{w}\right)}, \quad w \neq 0 \end{aligned}$$

### Geometrisk tolkning og eksponentialer

Hvis modulus benævnes $r$ og argument benævnes $\theta$ gælder

$$\begin{aligned} r = |z| &= \sqrt{a^2+b^2} \\ |z^n| = r^n &\;, \quad \arg(z^n) = n\theta \\ z = z_1 z_2 &\Leftrightarrow r = r_1 r_2, \quad \theta = \theta_1 + \theta_2 \\ |z + w| &\leq |z| + |w| \\ e^z &= e^a(\cos b + i \sin b) \\ e^{z+w} &= e^z \cdot e^w \\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n &= cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Konjugering af et komplekst tal er det samme som at spejle det i $\mathbb{R}$-aksen.

Når man differentierer sin eller cos går man med uret og når man integrerer dem går man mod uret.

### Rødder

$$\begin{aligned} \sqrt{zw} &= \sqrt{z}\sqrt{w} \\ z\sqrt{w} &= \sqrt{z^2 w} \end{aligned}$$

Der findes $n$ rødder $w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ til $z$ som er givet ved

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta + 2k\pi}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad 0 < n \leq k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Hvis man får brug for at tage den $n$-te rod af $i$ er en af løsningerne

$$\sqrt[n]{i} = e^{i\frac{\pi}{2n}}, \quad n \in \mathbb{R}_+$$

Andengradsligningen $az^2 + bz + c = 0,\ a \neq 0$ har løsningerne

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Algebrarens fundamentalsætning (rødderne til $n$-tegradsligningen benævnes $r_1, r_2 ... r_n$)

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} ... c_0 = c_n (z - r_1)(z - r_2)...(z - r_n)$$

Hvis $r$ er en rod er den komplekst konjugerede $\overline{r}$ også en rod.

## Grænseværdier

Følgen $\{a_n\}$ konvergerer mod a hvis der for ethvert reelt tal $\epsilon > 0$ findes et tal $N \in \mathbb{N}$ således at $|a_n - a| < \epsilon$ for alle $n \geq N$; altså

$$\lim_{x \to \infty} a_n = a$$

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er to konvergente følger (eller funktioner) med $\lim_{x \to l} a_n = A$ og $\lim_{x \to l} b_n = B$ gælder

$$\lim_{x \to l} a_n + b_n = A + B$$

$$\lim_{x \to l} a_n - b_n = A - B$$

$$\lim_{x \to l} a_n \cdot b_n = A \cdot B$$

$$\lim_{x \to l} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

L'Hôpitals regel siger at grænseværdien af en brøk, hvor tælleren og nævneren enten begge går mod 0, begge går mod $\infty$ eller begge går mod $-\infty$, er lig med grænseværdien af tælleren differentieret over nævneren differentieret, forudsat at denne grænseværdi konvereger

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Differentiable (og integrerbare) funktioner

En funktion $f$ er differentiabel i $a$ hvis følgende grænseværdi eksisterer

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Hvis $c$ er en konstant og der differentieres mht. $x$ gælder

$$\begin{array}{llcl}
D[ & c & ] & = & 0 \\
D[ & x^c & ] & = & cx^{c-1} \\
D[ & c^x & ] & = & c^x \ln c, \quad c > 0 \\
D[ & e^x & ] & = & e^x \\
D[ & x^x & ] & = & x^x(1 + \ln x) \\
D[ & \sqrt{x} & ] & = & \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0 \\
D[ & \ln|x| & ] & = & \frac{1}{x} \\
D[ & \sin x & ] & = & \cos x \\
D[ & \cos x & ] & = & -\sin x \\
D[ & \tan x & ] & = & \frac{1}{(\cos x)^2}
\end{array}$$

Desuden gælder, hvis $f$ og $g$ er differentiable funktioner,

$$\begin{array}{lclcl}
D[ & c \cdot f(x) & ] & = & c \cdot f'(x) \\
D[ & f(x) + g(x) & ] & = & f'(x) + g'(x) \\
D[ & f(x) - g(x) & ] & = & f'(x) - g'(x) \\
D[ & f(x) \cdot g(x) & ] & = & f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
D[ & f(g(x)) & ] & = & f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{array}$$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$$

Hvis funktionen $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ har et maksimum eller et minimum i et indre punkt $c \in ]a; b[$, gælder

$$f'(c) = 0$$

For funktioner af flere variabler er det gradienten der skal være 0. Se iøvrigt kædereglen for sammensatte funktioner af flere variable.

$$\begin{array}{lcl}
\int af(x)\ \mathrm{d}x & = & a\int f(x)\ \mathrm{d}x \\
\int f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x & = & \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x \\
\int f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x & = & \int f(x)\ \mathrm{d}x - \int g(x)\ \mathrm{d}x \\
\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x & = & F(g(x)) + C \\
\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C & \Leftrightarrow & \int f(ax)\ \mathrm{d}x = \frac{F(ax)}{a} + C, \quad a \neq 0
\end{array}$$

Integration ved substitution, hvor $g(x)$ erstattes med $t$

$$\int f(g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(t)\frac{1}{t'}\ \mathrm{d}t$$

Delvis integration, hvor $G(x)$ er en stamfunktion til $g(x)$

$$\int f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\ \mathrm{d}x$$

## Differentialligninger

### Førsteordens, lineære

Løsningerne til

$$y' + f(x)y = g(x)$$

hvor $F'(x) = f(x)$ er givet ved

$$y = e^{-F(x)} \left( \int e^{F(x)} g(x) \, \mathrm{d}x + C \right)$$

### Førsteordens, seperable

Løsningerne til

$$q(y)y' = p(x)$$

findes ved at løse følgende ligning mht. y (hvor $Q'(y) = q(y)$ og $P'(x) = p(x)$)

$$Q(y) = P(x) + C$$

### Andenordens, homogene

Alle løsningerne til den homogene ligning

$$y'' + py' + qy = 0$$

afhænger af rødderne i den kakteristiske ligning $r^2 + pr + q = 0$, der giver anledning til tre tilfælde

- To reelle rødder $r_1$ og $r_2$

$$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

- En reel rod $r$

$$y = Ce^{rx} + Dxe^{rx}$$

- To komplekse rødder $r = a \pm ib$ hvor $b \neq 0$

$$y = e^{ax}(C \cos(bx) + D \sin(bx))$$

I alle tilfælde gælder $C, D \in \mathbb{R}$. Givet tre reelle tal c, d og e findes der præcis én løsning således at $y(c) = d$ og $y'(c) = e$.

### Andenordens, inhomogene

Alle løsningerne til den inhomogene ligning

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

er givet ved

$$y = y_p + y_h$$

hvor $y_p$ er en løsning til den inhomogene ligning og $y_h$ er en vilkårlig løsning (altså uden konstanterne C og D) af den *homogene* ligning $y'' + py' + qy = 0$. Se iøvrigt s. 546–548 for metoder til at gætte den første løsning.

## Taylorpolynomier

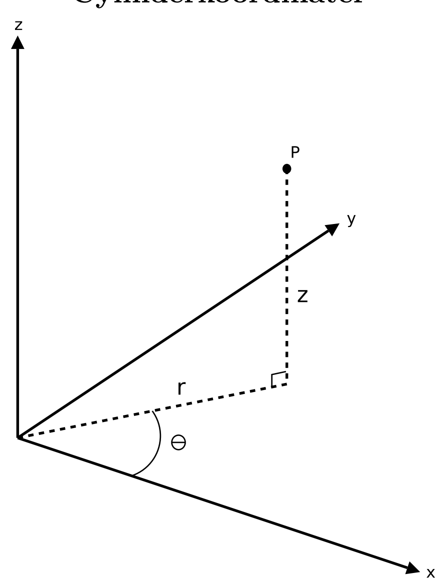
Hvis $f$ er $n$ gange differentiabel i $a$ da kan taylorpolynomiet skrives ved

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Hvilket er det eneste $n$-tegradspolynomie som både har samme funktionsværdi og de samme $n$ førsteafledede som $f$ i $a$.

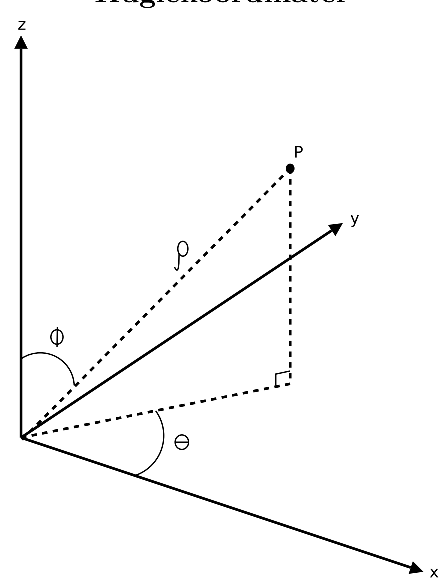
## Koordinatsystemer

**Cylinderkoordinater**




$P(r, \Theta, z)$
$x = r\cos\Theta$
$y = r\sin\Theta$
$z = z$

**Kuglekoordinater**




$P(\rho, \Theta, \phi)$
$x = \rho\cos\Theta\sin\phi$
$y = \rho\sin\Theta\sin\phi$
$z = \rho\cos\Theta$

## Definitionsmængder

En definitionsmængde beskriver hvad funktionen kan tage af argumenter (mens en værdimængde beskriver hvad den kan returnere). Definitionsmængden har samme antal dimensioner som antallet af argumenter (typisk en dimension lavere end grafen). I de følgende underafsnit benævner $A$ definitionsmængden.

### Randen

De punkter hvorom ligegyldigt hvor lille en kugle der lægges med centrum i punktet vil den stadig indeholde noget inden i $A$ og noget udenfor; $\partial a$

### Det indre

De punkter hvorom der kan lægges en tilstrækkelig lille kugle således at den kun indeholder punkter fra $A$; $A \backslash \partial A$

### Tillukningen

Fællesmængden af $A$ og dens randpunkter; $\bar{A} = A \cup \partial A$

### Åben

En mængde der ikke indeholder nogle af sine randpunkter; $A = A \backslash \partial A$

### Afsluttet ("lukket")

En mængde der indeholder alle sine randpunkter. En definitionsmængde er afsluttet hvis lighestegnene er svage $(\leq, \geq, =)$; $A = \bar{A}$

### Begrænset

Der kan lægges en kugle med centrum i origo ($\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$), der indeholder alle punkter i $A$. En mængde er kun begrænset hvis alle koordinaterne er begrænsede.

### Isoleret punkt

Et punkt er isoleret hvis der ikke findes andre punkter i $A$ vilkårligt tæt på punktet; $\vec{a} \notin \overline{A \backslash \{\vec{a}\}}$

### Akkumulationspunkt

Et akkumulationspunkt er et punkt der ikke er isoleret. Lige meget hvor lille en kulgle der lægges om det, indeholder den også andre punkter fra $A$; $\vec{a} \in \overline{A \backslash \{\vec{a}\}}$

## Partiel differentation

Ved partiel differentation differentierer man med hensyn til et argument ad gangen. F.eks. skrives $f$ differentieret alene mht. $x_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \ \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Der er forskel på hvor $(\vec{x})$ står i udtrykket; står den nede ved siden af brøken som ovenfor skal $f$ først differentieres mht. $x_1$, og derefter andvendes det fremkomne udtryk på $\vec{x}$.

Står det derimod oppe i tælleren ved siden af $f$ skal funktionen først andvendes på $\vec{x}$ hvorefter dette udtryk differentieres mht. $x_1$.

Hvis man differentierer det samme udtryk flere gange er rækkefølgen ligegyldig

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

### Frosne konstanter

Har man et partielt afledt udtryk og vil forsøge at finde den oprindelige funktion, er det vigtigt at huske på de "frosne konstanter". Har man f.eks. den afledte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$$

kan den oprindelige funktion godt indeholde andre led med $y$, f.eks.

$$f(x, y) = x^2 y + y^2$$

Idet led uden $x$ forsvinder ved differentation mht. x.

### Gradienten

Gradienten beskriver i hvilken retning funktionen vokser mest, samt hvor hurtigt den vokser i denne retning. Det er vektoren af de partielle afledede for samtlige argumenter

$$\nabla f(\vec{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$$

### Niveauflader

Gradienten er altid vinkelret på niveaufladen givet ved ligningen $f(\vec{x}) = c$.

### Retningsafledede

Af en funktion af flere variable kan man tage den retningsafledede, hvilket vil sige at man kigger på hvor meget funktionen vokser i en bestemt retning.

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

Relationen mellem den retningsafledede og gradienten skrives

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$$

### Tangentplan

Et tangentplan/hypertangentplan er en affin funktion som tangerer grafen i et punkt. I dimensioner højere end tre kaldes det ofte for et hypertangentplan.

Tangentplanet $h(\vec{x})$ der går igennem punktet $\vec{a}$ udregnes ved

$$h(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

En tangentlinie givet ved ligningen $h(\vec{x}) = 0$ tangerer en niveauflade.

### Kædereglen

Kædereglen bruges til at differentiere sammensatte funktioner partielt. Her vises formlen for udtrykket $k(x) = f(g(x))$, hvor $u = g(x)$:

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

Tager den ydre funktion flere variabler, f.eks. to som i $f(g(x), h(x))$ kan $h(x)$ på samme måde erstattes med $v$, og der lægges blot et tilsvarende led til i formlen

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}$$

Tager de indre funktioner ($g$, $h$, etc.) mere end en variabel, kan der differentieres mht. disse ved at erstatte $x$ i den ovenstående formel med den variabel, der skal differentieres efter (f.eks. $y$).

Funktionen $k$ tager samme antal argumenter som de indre funktioner ($f$, $g$, etc.). Husk at substituere $u$, $v$, etc. ind når der er differentieret.

## Ekstremumsværdier

En ekstremumsværdi er enten et lokalt minimum eller et lokalt maksimum. Ved lokalt menes at det ikke nødvendigvis er det punkt med den mindste/største funktionsværdi i hele definitionsmængden (dette er det globale maksimum), men at det er et punkt med en funktionsværdi der er mindre/større end alle de omkringliggende punkters. Maksimalværdierne for en funktion $f : A \to \mathbb{R}$ kan skrives

$$\{\vec{a} \in A \mid \exists r \in \mathbb{R}_+ : \forall \vec{y} \in \{\vec{v} \in A \mid r > \parallel \vec{v} - \vec{a} \parallel\} : \; f(\vec{a}) \geq f(\vec{y})\}$$

### Ekstremalværdisætningen

Lad $A \subset \mathbb{R}^n$ være en lukket, begrænset mængde og $f : A \to \mathbb{R}$ være kontinuert. Da har $f$ maksimal- og minimalpunkt(er).

### Førsteaflededetesten

Hvis $f : A \to \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum eller minimum i $\vec{a}$ så gælder det at $\vec{a}$ er et **kritisk punkt**. Dermed gælder netop ét af de følgende udsagn:

- $\vec{a} \in \partial A$ ($\vec{a}$ er et **randpunkt**) eller
- $\nabla f$ eksisterer ikke i $\vec{a}$ eller
- $\nabla f(\vec{a}) = 0$, hvilket vil sige at $\vec{a}$ er et **stationært punkt**.

### Andenaflededetesten

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en $C^2$-funktion. Hvis $\vec{a}$ er et stationært punkt for $f$ (altså $\nabla f(\vec{a}) = 0$) og

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}), \quad D = AC - B^2$$

Da gælder (alene for funktioner af to variable), hvis:

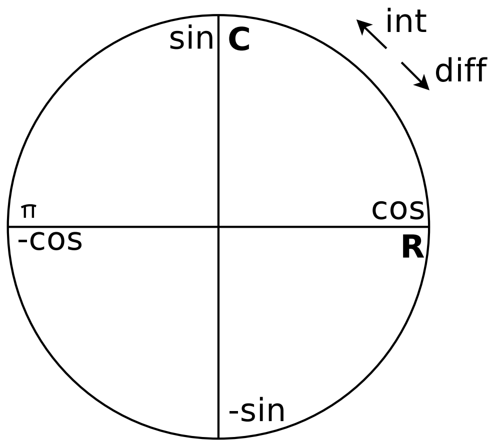
- $D = 0 \vdash$ intet kan konkluderes.
- $D < 0 \vdash \vec{a}$ er et **sadelpunkt**.
- $D > 0$ og
  - $A > 0 \vdash \vec{a}$ er et lokalt **minimum**.
  - $A < 0 \vdash \vec{a}$ er et lokalt **maksimum**.

### Lagrange

Lad $f \to A,\ g \to A,\ A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\vec{a} \in A,\ g(\vec{a}) = c$. Lad en niveauflade $S = \{\vec{x} \in A \mid g(\vec{x}) = c\}$. Hvis $f$ har lokalt ekstremalpunkt inden for $S$ i $\vec{a}$, så gælder netop ét af de følgende udtryk:

- $\nabla g(\vec{a}) = 0$ eller
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla f(\vec{a}) = \lambda \nabla g(\vec{a})$.

I det sidste tilfælde får man typisk $n + 1$ ligninger med $n + 1$ ubekendte.




| $\circ$ | $\angle$ | cos | sin |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 30 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 60 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 90 | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | 1 |
| 120 | $\frac{2\pi}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 135 | $\frac{3\pi}{4}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 150 | $\frac{5\pi}{6}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 180 | $\pi$ | $-1$ | 0 |
| 210 | $\frac{7\pi}{6}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| 225 | $\frac{5\pi}{4}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 240 | $\frac{4\pi}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 270 | $\frac{3\pi}{2}$ | 0 | $-1$ |
| 300 | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 315 | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 330 | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

| $x$ | $\ln(x)$ |
|---|---|
| 0 | ikke defineret |
| 1 | 0 |
| $e$ | 1 |

| $x$ | $\log_c(x)$ |
|---|---|
| 0 | ikke defineret |
| 1 | 0 |
| $c$ | 1 |